JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **21**, 394–410 (1977)

Methoden zur Bestimmung von Reprokernen

ULRICH TIPPENHAUER

Fachbereich Mathematik, Universität Kaiserslautern, 675 Kaiserslautern, Bundesrepublik Deutschland

Communicated by Carl de Boor

Received April 26, 1976

Methods to determine reproducing kernels. The explicit representation of continuous linear functionals on a Hilbert space by reprokernels is significant for interpolation and approximation. Starting with the kernels theorem, due to Schwartz, we develop methods to determine reprokernels for the Sobolev spaces $W_2^k(\Omega)$ if $\Omega \subset \mathbb{R}^1$, and for some subspaces of $W_2^k(\Omega)$ if $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Then we determine reprokernels for tensor products of Hilbert spaces. In addition to this we consider three types of limits of reprokernels.

1. EINLEITUNG

Die explizite Darstellung von stetigen linearen Funktionalen auf Unterhilberträumen V von $\mathbb{R}^\Omega$ – d.h. $V \in \text{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$ – ist besonders im Bereich der Interpolations – und Approximationstheorie von Bedeutung. Wie in den Arbeiten [10, 11] dargelegt wird, ist diese Darstellung mit reproduzierenden Kernen – kurz Reprokerne genannt-stets möglich.

So lassen sich damit Spline-Funktionen zu beliebigen stetigen linearen Funktionalen in den entsprechenden Grundräumen bestimmen; man vergleiche hierzu [2, 3, 10]. In der Arbeit [14] werden mit Hilfe der Reprokerne Verfahren zur approximativen Lösung von gewöhnlichen Differential-, Integral-, und Integrodifferentialgleichungen entwickelt. Alle diese Fälle beschränken sich auf Funktionen in einer Veränderlichen.

Um die Methode der Spline-Interpolation oder die erwähnten Approximationsverfahren bei Funktionen in mehreren Veränderlichen anwenden zu können, ist zunächst eine Fortführung und Verallgemeinerung der in [10] entwickelten Methode zur Bestimmung von Reprokernen sinnvoll.

So wird im zweiten Abschnitt ein Zusammenhang zwischen dem Théorème des Noyaux und Reprokernen zu $V \in \text{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$ mit $\mathscr{D}(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$ hergestellt. Es stellt sich heraus, daß bestimmte Kerndistributionen von Reprokernen repräsentiert werden.

Im 3. Abschnitt werden damit die Reprokerne zu den Sobolevräumen $W_2^k(\Omega)$ bestimmt, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein offenes beschränktes Intervall ist. Es

ISSN 0021-9045

werden äquivalente Skalarprodukte auf $W_2^k(\Omega)$ eingeführt und die Reprokerne bezüglich dieser Hilbertschen Strukturen angegeben.

Im 4. Abschnitt werden die Reprokerne zu $W_2^k(\Omega)$ im Rahmen der Theorie der elliptischen Randwertprobleme [1, 4, 6] untersucht, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend sowie $k > n/2$ ist. Mit den Resultaten des zweiten Abschnittes lassen sich die Reprokerne zu abgeschlossenen Unterräumen von $W_2^k(\Omega)$ angeben, welche von bestimmten Randoperatoren abhängen.

Im 5. Abschnitt werden Tensorprodukte von Hilberträumen mit Reprokernen gebildet; es stellt sich heraus, daß der Reprokern des topologischen Tensorproduktes gerade das Tensorprodukt der Reprokerne ist. Auf die Bedeutung dieser Methode wird in den Arbeiten [2, 5, 8, 9] hingewiesen.

Im 6. Abschnitt werden Limiten von Reprokernen untersucht. Diese hängen im ersten Fall von einer Folge von Skalarprodukten auf $V \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$ ab. Im zweiten Fall hängen sie von einer Folge $\{V_i\} \subset \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$ und im dritten Fall von einer Folge $V_i \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^{\Omega_i})$ ab. Die abei erzielten Resultate lassen sich zusammen mit der Methode der finiten Elemente [7] bei der Ermittlung approximativer Lösungen für partielle Differentialgleichungen anwenden.

Herrn Prof. Dr. H. Brakhage danke ich sehr für zahlreiche Hinweise und Diskussionen zu dem Gegenstand dieser Arbeit.

2. Reprokerne und das Théorème des Noyaux

Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. $E = \mathbb{R}^\Omega$ sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller auf Ω definierten reellwertigen Funktionen, welcher mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen ist. $\mathrm{Hilb}(E)$ bezeichne die Menge aller Unterhilberträume von $\mathbb{R}^\Omega$, d.h. die Menge aller Untervektorräume V von $\mathbb{R}^\Omega$, welche eine Hilbertsche Struktur tragen, so daß die kanonische Injektion $j_V\colon V \hookrightarrow E$ stetig ist. $\mathrm{Hilb}(E)$ sei weiter wie in den Arbeiten [10, 11] strukturiert, also ein regulärer strikter konvexer Kegel.

$\mathscr{D}(\Omega)$ sei mit der kanonischen LF-Topologie versehen, $\mathscr{D}'(\Omega)$ mit der starken dualen Topologie. Nach dem *Théorème des Noyaux* ist $\mathscr{D}'(\Omega \times \Omega)$ kanonisch isomorph zu $L(\mathscr{D}(\Omega), \mathscr{D}'(\Omega))$, wobei $L(\mathscr{D}(\Omega), \mathscr{D}'(\Omega))$ mit der Topologie der beschränkten Konvergenz versehen ist; man vergleiche hierzu [12, 13].

Voraussetzung 2.1. *Es seien $V \in \mathrm{Hilb}(E)$ und H ein Hilbertraum so, daß mit stetigen kanonischen Injektionen gilt*:

$$\mathscr{D}(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega).$$

Weiter sei V dicht in H und $\mathscr{D}(\Omega)$ dicht in H'.

Wird die isometrische Isomorphie zwischen V und V' mit A bezeichnet, so läßt sich A^{-1}: $V' \to V$ mit Hilfe des Reprokernes G zu V explizit darstellen; es gilt nämlich

$$\langle A^{-1}\mathscr{L}, \delta_x \rangle_{V,V'} = \langle G(\cdot, x), \mathscr{L} \rangle_{V,V'}$$

für alle Elemente $\mathscr{L} \in V'$, wobei δ_x das Dirac-Maß in $x \in \Omega$ und $(\cdot \mid \cdot)_V$ das Skalarprodukt auf V bezeichnet.

Es sei nun H' der starke topologische Dual zu H und

$$D(A) := \{v \in V: Av \in H'\}.$$

Dann gilt:

LEMMA 2.1. *Ist G der Reprokern zu V, so besitzt A^{-1}: $H' \to D(A)$ die Darstellung*

$$\langle A^{-1}\mathscr{L}, \delta_x \rangle_{V,V'} = \langle G(\cdot, x), \mathscr{L} \rangle_{H,H'}.$$

Beweis. Sei also $\mathscr{L} \in H' \hookrightarrow V'$; dann ist

$$\begin{aligned}\langle A^{-1}\mathscr{L}, \delta_x \rangle_{V,V'} &= \langle G(\cdot, x), \mathscr{L} \rangle_{V,V'} \\ &= \langle G(\cdot, x), \mathscr{L} \rangle_{H,H'}.\end{aligned}$$

Weiter ergibt sich

LEMMA 2.2. *Ist $H = L^2(\Omega)$, so gilt für alle $f \in H' = L^2(\Omega)$:*

$$\langle A^{-1}f, \delta_x \rangle_{V,V'} = \int_\Omega G(y, x) f(y)\, dy. \tag{2.1}$$

Beweis. Wir identifizieren H' mit $L^2(\Omega)$; für $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ergibt sich also

$$\langle \psi(y), A^{-1}\varphi(x) \rangle_{\mathscr{D}(\Omega), \mathscr{D}'(\Omega)} = \left\langle \psi(y), \int_\Omega G(t, x)\, \varphi(t)\, dt \right\rangle_{\mathscr{D}(\Omega), \mathscr{D}'(\Omega)}.$$

Da $\mathscr{D}(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt, gilt die Darstellung (2.1).

Betrachtet man die Restriktion von A^{-1} auf $\mathscr{D}(\Omega)$, so ist

$$A^{-1}: \mathscr{D}(\Omega) \to D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$$

eine stetige lineare Abbildung von $\mathscr{D}(\Omega)$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$. Nach dem *Théorème des Noyaux* existiert also eine eindeutig bestimmte Distribution $K \in \mathscr{D}'(\Omega \times \Omega)$ so, daß für alle Elemente $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ gilt:

$$\langle \psi(y), A^{-1}\varphi(x) \rangle_{\mathscr{D}(\Omega), \mathscr{D}'(\Omega)} = \langle \varphi(x) \cdot \psi(y), K_{xy} \rangle_{\mathscr{D}(\Omega\times\Omega), \mathscr{D}'(\Omega\times\Omega)}. \tag{2.2}$$

Wir erhalten also

SATZ 2.1. *Die Distribution $K \in \mathscr{D}'(\Omega \times \Omega)$ in* (2.2) *wird von dem Reproprokern G zu V repräsentiert.*

Beweis. Seien $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Gemäß Lemma 2.2 ist

$$\langle \psi(y), A^{-1}\varphi(x)\rangle_{\mathscr{D}(\Omega),\mathscr{D}'(\Omega)} = \left\langle \psi(y), \int_\Omega G(t, x)\, \varphi(t)\, dt \right\rangle_{\mathscr{D}(\Omega),\mathscr{D}'(\Omega)}$$
$$= \int_\Omega \int_\Omega G(x, y)\, \varphi(x) \cdot \psi(y)\, dx\, dy;$$

also wird K von G repräsentiert.

3. Reprokerne zu $V \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^1$

Im folgenden sei $\Omega = (a, b)$ ein offenes beschränktes Intervall von $\mathbb{R}$. $W_2^k(\Omega)$ bezeichne den Sobolevraum, d.h. den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller auf Ω definierten reellwertigen Funktionen, deren Ableitungen bis einschließlich der Ordnung k im distributionellen Sinne Elemente des Raumes $L^2(\Omega)$ sind. $W_2^k(\Omega)$ wird—wie üblich—mit dem Skalarprodukt

$$(u \mid v)_k := \sum_{j=0}^{k} (D^j u \mid D^j v)_{L^2(\Omega)}$$

versehen; $\mathring{W}_2^k$ sei der Abschluß von $\mathscr{D}(\Omega)$ in $W_2^k(\Omega)$. Für $k \geqslant 1$ sind die Voraussetzungen zu dem Sobolevschen Einbettungssatz erfüllt. Also gilt $W_2^k(\Omega) \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$.

Es sei nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig, $V := \mathring{W}_2^k(\Omega)$ und $H = L^2(\Omega)$; dann ist die Voraussetzung 2.1 erfüllt. Die isometrische Isomorphie $A\colon V \to V'$ ist in diesem Fall

$$A = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i D^{2i}.$$

Der Differentialoperator A ist stark elliptisch in Ω und formal selbstadjungiert. Es existiert also ein Greenscher Operator $\mathscr{G}\colon H \to V$, welcher linear, stetig und injektiv ist; darüberhinaus ist $\mathscr{G}$ ein kompakter Operator. Somit ergibt sich

Satz 3.1. *Die Greensche Funktion g zu dem Randwertproblem $Av = h$ mit $v \in V$ und $h \in H$ ist der Reprokern zu V.*

Beweis. Sei $h \in H$; dann gilt mit Lemma 2.1 und Lemma 2.2:

$$\langle A^{-1}h, \delta_x\rangle_{V,V'} = \int_\Omega G(y, x)\, h(y)\, dy$$
$$= \langle \mathscr{G}h, \delta_x\rangle_{V,V'}$$
$$= \int_\Omega g(y, x)\, h(y)\, dy;$$

da nun $H' = L^2(\Omega) = H$ dicht in V' liegt, gilt für alle Elemente $\mathscr{L} \in V'$:

$$\langle A^{-1}\mathscr{L}, \delta_x \rangle_{V,V'} = \langle g(\cdot, x), \mathscr{L} \rangle_{V,V'} .$$

Sei nun $u \in V$ beliebig. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}(g(y, x),\ u(y))_V &= \langle g(\cdot, x), Au \rangle_{V,V'} \\ &= u(x).\end{aligned}$$

Also ist g der Reprokern zu V.

KOROLLAR 3.1. *Der Reprokern zu* $W_2^k(\Omega)$ *ist*

$$R(x, y) = g(x, y) - \sum_{i=1}^{2k} e_i(x)\, e_i(y), \tag{3.1}$$

wobei g die Greensche Funktion gemäß Satz 3.1 *und* $e_1, \ldots, e_{2k}$ *eine Orthonormalbasis in* Ker(A) *ist.*

Beweis. Es gilt $W_2^k(\Omega) = V \oplus \mathrm{Ker}(A)$; da dim Ker$(A) = 2k$ ist, erhält man (3.1). Vgl. [10].

BEISPIEL 3.1. Sei $k = 1$. Der Reprokern zu $W_2^1(\Omega)$ ergibt sich somit aus der Greenschen Funktion g zu dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} Av &= v - v'' = h, \qquad h \in L^2(\Omega), \\ v(a) &= v(b) = 0; \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} g(x, y) = \frac{1}{2(e^{2b} - e^{2a})} \{ &(e^{x} - e^{-x+2a}) \cdot (e^{-y+2b} - e^{y}) \cdot (y - x)_+^0 \\ &+ (e^{-x+2b} - e^{x}) \cdot (e^{y} - e^{-y+2a}) \cdot [1 - (y - x)_+^0] \}, \end{aligned}$$

wobei

$$(y - x)_+^0 := \begin{cases} 1, & y \geq x \\ 0, & y < x \end{cases}$$

ist.

Da $\mathrm{Ker}(A) = \langle e^x, e^{-x} \rangle$ ist, erhält man zu diesem Unterraum den Reprokern

$$K(x, y) = \frac{1}{(e^{2b} - e^{2a})} \{ e^{x+y} + e^{-x-y+2a+2b} \}.$$

Nach Korollar 3.1 ist also $R(x, y) = g(x, y) - K(x, y)$ der Reprokern zu $W_2^1(\Omega)$. Andererseits besitzt g die Darstellung

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(b-a)}{(b-a)^2 + 4\pi^2 n^2} \sin\left(2\pi n \frac{x-a}{b-a}\right) \cdot \sin\left(2\pi n \frac{y-a}{b-a}\right),$$

da das Eigenwertproblem $Av = \lambda v$, $v(a) = v(b) = 0$ die Eigenwerte

$$\lambda_n = 1 + \frac{4\pi^2 n^2}{(b-a)^2}$$

und die Eigenfunktionen

$$v_n(x) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{1/2} \sin\left(2\pi n \frac{x-a}{b-a}\right)$$

besitzt.

Bemerkung 3.1. Zur allgemeinen Konstruktion der Reprokerne in den Sobolevräumen $W_2^k(\Omega)$ läßt sich folgendes sagen: Gemäß Satz 3.1 ist zu festem Index $k \geqslant 1$ die Greensche Funktion g zu dem Randwertproblem $Av = h$ in $\mathring{W}_2^k(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$, der Reprokern zu $\mathring{W}_2^k(\Omega)$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit ein Fundamentalsystem von A lassen sich relativ einfach mit Hilfe der Kreisteilungsgleichung bestimmen.

Es sei nun ein Differentialoperator vom Typ

$$T = D^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x)\, D^i, \qquad a_i \in C^0(\Omega), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1 \tag{3.2}$$

gegeben; $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_k$ seien stetige Linearformen auf $V := W_2^k(\Omega)$, welche linear unabhängig auf $\operatorname{Ker}(T)$ sind. Mit

$$U\colon V \ni v \mapsto Uv := (\langle v, \mathscr{L}_1\rangle_{V,V'}, \ldots, \langle v, \mathscr{L}_k\rangle_{V,V'})^t \in \mathbb{R}^k$$

wird durch

$$((u \mid v)) := (Tu \mid Tv)_{L^2(\Omega)} + (Uu \mid Uv)_{\mathbb{R}^k} \tag{3.3}$$

auf V ein Skalarprodukt definiert, welches äquivalent zu $(\cdot \mid \cdot)_k$ ist; d.h. die von $((\cdot \mid \cdot))$ und $(\cdot \mid \cdot)_k$ induzierten Normen sind äquivalent. Im folgenden betrachten wir stets V mit dem Skalarprodukt (3.3). Wie in der Arbeit [10] ausgeführt worden ist, ergibt sich in diesem Falle der Reprokern $R = K_1 + K_2$ zu V aus

$$K_1(x, y) = (q(x, t) \mid q(y, t))_{L^2(\Omega)} \tag{3.4}$$

und $K_2(x, y) = \sum_{i=1}^{k} e_i(x)\, e_i(y)$, wobei q die Greensche Funktion zu dem Anfangswertproblem

$$Tv = h, \qquad h \in L^2(\Omega),$$
$$Uv = 0,$$

und $e_1, \ldots, e_k$ die zu $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_k$ duale Basis in $\operatorname{Ker}(T)$ ist.

BEISPIEL 3.2. Sei $T = 1 + D$ und $\langle v, \mathscr{L}_1\rangle_{V,V'} = v(a)$. Bezüglich der durch

$$((u \mid v)) = u(a) \cdot v(a) + (u + u' \mid v + v')_{L^2(\Omega)}$$

auf $W_2^1(\Omega)$ definierten Hilbertschen Struktur ist

$$R(x, y) = e^{-x-y+2a} + \tfrac{1}{2}\{(e^{y-x} - e^{2a-x-y}) \cdot (x - y)_+^0$$
$$+ (e^{x-y} - e^{2a-y-x}) \cdot [1 - (x - y)_+^0]\}$$

der Reprokern.

Bemerkung 3.2. Die von (3.3) induzierte Hilbertsche Struktur ist eine dem zugrundeliegenden Variationsproblem angepaßte Struktur, wie sie etwa im Zusammenhang mit Spline-Funktionen oder approximativen Lösungen von Differential-, Integral- und Integro-Differentialgleichungen auftritt: man vergleiche hierzu [2, 3, 10, 14].

Wir betrachten nun $V = W_2^k(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$((u \mid v)) := (Tu \mid Tv)_{L^2(\Omega)} + (U_1 u \mid U_1 v)_{\mathbb{R}^k} + (U_2 u \mid U_2 v)_{\mathbb{R}^k}, \qquad (3.5)$$

wobei T ein Differentialoperator vom Typ (3.2) —jedoch mit $a_i \in C^i(\Omega)$, $0 \leqslant i \leqslant k - 1$—, U_1 durch

$$U_1 \colon V \ni v \to U_1 v := (u(a), u'(a), \ldots, u^{(k-1)}(a))^t \in \mathbb{R}^k$$

und U_2 durch

$$U_2 \colon V \ni v \to U_2 v := (u(b), u'(b), \ldots, u^{(k-1)}(b))^t \in \mathbb{R}^k$$

definiert ist. Damit ist (3.5) äquivalent zu $(\cdot \mid \cdot)_k$. Ist T^* der formale adjungierte Differentialoperator zu T, so gilt

$$V = \mathring{V} \oplus \operatorname{Ker}(T^*T),$$

wobei $\mathring{V}$ der Abschluß von $\mathscr{D}(\Omega)$ in V bezüglich der von (3.5) induzierten Normtopologie ist.

Dann ergibt sich mit Lemma 2.1 und Lemma 2.2

SATZ 3.2. *Die Greensche Funktion g zu dem Randwertproblem $T^*Tv = h$ mit $v \in \mathring{V}$ und $h \in L^2(\Omega)$ ist der Reprokern zu $\mathring{V}$.*

Beweis. Analog zu dem Beweis des Satzes 3.1.

Mit dem Korollar 3.1 erhält man also den Reprokern R zu V.

Es seien nun q_i die Greenschen Funktionen zu den Anfangswertproblemen

$$Tv = h, \qquad h \in L^2(\Omega),$$
$$U_i v = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Das folgende Korollar stellt einen Zusammenhang zwischen der Greenschen Funktion g in Satz 3.2 und q_i dar:

KOROLLAR 3.2. *Es gilt*

$$g(x, y) = \int_\Omega q_i(x, t)\, q_i(y, t)\, dt, \qquad i = 1, 2. \tag{3.6}$$

Beweis. Bezüglich (3.5) ist $g(x, y)$ der Reprokern zu V. Auf den abgeschlossenen Unterräumen

$$V_j := \{u \in V\colon U_j v = 0\}, \qquad j = 1, 2,$$

entspricht die von (3.5) induzierte Hilbertsche Struktur

$$((u \mid v))_j := (Tu \mid Tv)_{L^2(\Omega)} + (U_i u \mid U_i v)_{\mathbb{R}^k}, \qquad i \neq j$$

einer Struktur vom Typ (3.3). Somit erhalten wir für alle Funktionen $u \in V$:

$$\begin{aligned} u(x) &= ((g(y, x) \mid u(y)))_j \\ &= ((K_j(y, x) \mid u(y)))_j, \end{aligned}$$

wobei gemäß der Beziehung (3.4) gilt:

$$g(y, x) = \int_\Omega q_j(y, t)\, q_j(x, t)\, dt, \qquad j = 1, 2.$$

Bemerkung 3.3. Wird $\Omega = \mathbb{R}$ gewählt und $W_2^k(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$((u \mid v)) := \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (D^j u \mid D^j v)_{L^2(\Omega)}$$

versehen, so ist $W_2^k(\Omega) \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$. Die isometrische Isomorphie A: $W_2^k(\Omega) = \mathring{W}_2^k(\Omega) \mapsto W_2^{-k}(\Omega)$ ist $A = (1 - D^2)^k$. Für den Reprokern G zu $W_2^k(\Omega)$ erhält man

$$G(x, y) = P_{2k-2}(x - y)\, e^{-|x-y|},$$

wobei P_{2k-2} ein Polynom vom Grade $2k - 2$ ist.

4. REPROKERNE ZU $V \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Es sei Ω eine offene, beschränkte und zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ω ist vom Typ $\mathscr{C}^l$, wenn der Rand $\partial\Omega$ eine $(n - 1)$-dimensionale C^l-Mannigfaltigkeit ist; in diesem Fall schreiben wir $\Omega \in \mathscr{C}^l$.

Sei $i = (i_1, \ldots, i_n)$ ein Multiindex $\geqslant 0$, $|i| := \sum_{r=1}^n i_r$ und

$$D^i := \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1}\, \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}}.$$

Ist $k \in \mathbb{N}$, so bezeichne $W_2^k(\Omega)$ wieder den Sobolevraum über $\mathbb{R}$, welcher mit dem Skalarprodukt

$$(u \mid v)_k := \sum_{|i| \leqslant k} (D^i u \mid D^i v)_{L^2(\Omega)} \tag{4.1}$$

versehen ist. Das Skalarprodukt

$$((u \mid v)) := \sum_{|i| = k} (D^i u \mid D^i v)_{L^2(\Omega)} + (u \mid v)_{L^2(\Omega)} \tag{4.2}$$

ist zu (4.1) äquivalent.

Falls $\Omega \in \mathscr{C}^1$ und $k > n/2$ ist, so sind die Voraussetzungen zu dem Sobolevschen Einbettungssatz erfüllt; es gilt dann $W_2^k(\Omega) \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$.

Im folgenden gelte stets $\Omega \in \mathscr{C}^{2k}$ und $k > n/2$. Der mit (4.1) assoziierte Differentialoperator

$$A := \sum_{|i| \leqslant k} (-1)^{|i|} D^{2i}$$

ist stark elliptisch in Ω und formal selbstadjungiert.

Für $0 \leqslant j \leqslant k-1$ sei $W_2^{k-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ mit der durch lokale Koordinaten definierten Sobolevschen Struktur versehen; vgl. [4, 6]. Dann ist $(W_2^{k-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))' = W_2^{-k+j+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Weiter gilt die Beziehung:

$$(u \mid v)_k = (u \mid Av)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=0}^{k-1} \langle \gamma_j u, S_j v \rangle_{W_2^{k-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\, W_2^{-k+j+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \tag{4.3}$$

wobei γ_j durch

$$\gamma_j : W_2^k(\Omega) \ni u \mapsto \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \in W_2^{k-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

definiert und $\partial/\partial n$ die Ableitung in Richtung der nach "außen" weisenden Normale ist; die Abbildungen S_j: $W_2^k(\Omega) \to W_2^{-k+j+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ sind Differentialoperatoren der Ordnung $2k-j-1$ mit konstanten Koeffizienten. γ_j und S_j sind stetig. Wir erhalten

SATZ 4.1. *Die Greensche Funktion g zu dem Randwertproblem $Av = h$ mit $v \in V := \mathring{W}_2^k(\Omega)$ und $h \in H = L^2(\Omega)$ ist der Reprokern zu V.*

Beweis. Sei γ: $W_2^k(\Omega) \ni u \mapsto \gamma u := (\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{k-1} u) \in \prod_{j=0}^{k-1} W_2^{k-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Da nun $\mathrm{Ker}(\gamma) = V$ ist, gilt für alle Funktionen $u, v \in V$ nach (4.3):

$$(u \mid v)_k = (u \mid Av)_{L^2(\Omega)} .$$

Andererseits ist A: $V \to V'$ die isometrische Isomorphie; somit besitzt A^{-1}: $H \to D(A) = \{v \in V\colon Av \in H' = H\}$ die Darstellung

$$\langle A^{-1}h, \delta_x \rangle_{V,V'} = \int_\Omega g(y, x)\, h(y)\, dy.$$

Da H' dicht in V' liegt ergibt sich mit Lemma 1 und Lemma 2 $g = G$, wobei G der Reprokern zu V ist.

KOROLLAR 4.1. *Der Reprokern zu* $W_2^k(\Omega)$ *ist*

$$R(x, y) = g(x, y) + K(x, y),$$

wobei g die Greensche Funktion gemäß Satz 4.1 *und K der Reprokern zu* $\operatorname{Ker}(A)$ *ist.*

Beweis. Da $W_2^k(\Omega) = V \oplus \operatorname{Ker}(A)$ ist, gilt (4.4).

Der Unterraum $\tilde{V} := \{u \in W_2^k(\Omega): S_j u = 0, 0 \leqslant j \leqslant k - 1\} \subset W_2^k(\Omega)$ ist abgeschlossen; da $S_j \varphi = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ gilt, ist $V = \mathring{W}_2^k(\Omega) \subset \tilde{V}$. Folglich ist mit $H = H' = L^2(\Omega)$ die Voraussetzung 2.1 erfüllt. Also ergibt sich

SATZ 4.2. *Die Greensche Funktion* $\tilde{g}$ *zu dem Randwertproblem* $Av = h$ *mit* $v \in \tilde{V}$ *und* $h \in H$ *ist der Reprokern zu* $\tilde{V}$.

Beweis. Für alle Funktionen $u, v \in \tilde{V}$ ergibt sich nach (4.3)

$$(u, v)_k = (u \mid Av)_{L^2(\Omega)} .$$

Wie im Beweis zu Satz 4.1 ist dann $\tilde{g}$ der Reprokern zu $\tilde{V}$.

KOROLLAR 4.2. *Sei* $V^\perp$ *das orthogonale Komplement zu* V *in* $\tilde{V}$. *Dann ist* $\tilde{g}(x, y) - g(x, y)$ *der Reprokern zu* $V^\perp$, *wobei g der Reprokern zu V ist.*

Beweis. Mit $\tilde{V} = V \oplus V^\perp$ ist $\tilde{g} = g + (\tilde{g} - g)$, also $\tilde{g} - g$ der Reprokern zu $V^\perp$.

Bemerkung 4.1. Die Aussagen in den Sätzen 4.1 und 4.2 lassen sich sofort auf den Fall übertragen, wenn $W_2^k(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt (4.2) versehen wird. Der damit assoziierte Differentialoperator ist

$$A = 1 + \sum_{|i|=k} (-1)^k D^{2i}.$$

Ebenso lassen sich die Reprokerne zu abgeschlossenen Unterräumen V mit $\mathring{W}_2^k(\Omega) \subset V \subset W_2^k(\Omega)$ bestimmen, welche durch allgemeinere als die erwähnten Randoperatoren γ_j und S_j charakterisiert werden. Man vergleiche etwa [1, 4, 6] hierzu.

BEISPIEL 4.1. Es sei $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} < 1\}$. Auf $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ ist

$$(u \mid v) := \sum_{|i|=2} (D^i u \mid D^i v)_{L^2(\Omega)} \tag{4.4}$$

ein Skalarprodukt, welches zu $(\cdot \mid \cdot)_2$ in (4.1) äquivalent ist. Der Reprokern G zu $W_2^k(\Omega)$ ist nach Satz 4.1 die Greensche Funktion zu dem Randwertproblem $Au = \sum_{|i|=2} D^{2i}u = h$ mit $u \in W_2^2(\Omega)$ und $h \in L^2(\Omega)$, also:

$$\begin{aligned} G((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \frac{1}{16}(x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1) \\ &\quad + \frac{1}{16\pi}\{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\} \\ &\quad \cdot \log\left(\frac{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - 2(x_1y_1 + x_2y_2) + 1}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right). \end{aligned}$$

Beispiel 4.2. Seien (a, b) und (c, d) offene beschränkte Intervalle von $\mathbb{R}$, $\Omega := (a, b) \times (c, d)$ und

$$\begin{aligned} V := \Big\{ v \in W_2^2(\Omega): \\ \int_{\partial\Omega} v\, ds = \int_{\partial\Omega} \left(v \cdot x_1 + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) ds = \int_{\partial\Omega} \left(v \cdot x_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) ds = 0 \Big\}. \end{aligned}$$

Wird V mit dem Skalarprodukt (4.4) versehen, so ist V ein abgeschlossener Unterraum mit $\mathring{W}_2^2(\Omega) \subset V \subset W_2^k(\Omega)$. Der Reprokern zu V ist die Greensche Funktion zu dem Randwertproblem $Au = \sum_{|i|=2} D^{2i}u = h$ mit $u \in V$ und $h \in L^2(\Omega)$. Es ergibt sich für den Reprokern

$$\begin{aligned} G((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{nm} \cdot \sin\left(m\pi \frac{x_1 - a}{b - a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \frac{x_2 - c}{d - c}\right) \\ \cdot \sin\left(m\pi \frac{y_1 - a}{b - a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \frac{y_2 - c}{d - c}\right), \end{aligned}$$

wobei

$$c_{mn} = \frac{4\{(b - a)(d - c)\}^7}{[\pi^2\{m^2(d - c)^2 + n^2(b - a)^2\}]^4}$$

ist.

Bemerkung 4.2. Es sei $\Omega = \mathbb{R}^n$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$ ein Multiindex mit $k_i > \frac{1}{2}$ und V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $u \in L^2(\Omega)$, deren Ableitungen $D^j u$ im distributionellen Sinne Elemente des Raumes $L^2(\Omega)$ sind. V werde mit dem Skalarprodukt

$$((u \mid v)) := \sum_{j \leq k} \binom{k}{j} (D^j u \mid D^j v)_{L^2(\Omega)}$$

versehen; dann ist $V \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$ und die isometrische Isomorphie A: $V \to V'$

$$A = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^{k_i}.$$

Der Reprokern G zu V ist damit

$$G((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i - y_i) \cdot \exp\left\{- \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |\right\},$$

wobei P_i Polynome vom Grade $2k_i - 2$ sind.

5. Reprokerne zu Tensorprodukten $V_1 \hat{\otimes} V_2 \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^{\Omega_1 \times \Omega_2})$

Eine Möglichkeit zur Lösung mehrdimensionaler Probleme im Bereich der Interpolations- und Approximationstheorie besteht darin, durch Bildung von Tensorprodukten "geeignete Grundräume" zu finden, in denen sich bekannte Verfahren anwenden lassen. Man vergleiche etwa [2, 5, 8, 9].

Wir betrachten im folgenden Tensorprodukte von separablen Hilberträumen, wie sie in [1, 9] untersucht werden. Es seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ Teilmengen. Das algebraische Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2$ der Unterhilberträume $V_i \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^{\Omega_i})$, $i = 1, 2$, besitze eine topologische Vervollständigung in $\mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^{\Omega_1 \times \Omega_2})$; d.h. es existiert ein Unterhilbertraum V von $\mathbb{R}^{\Omega_1 \times \Omega_2}$ mit der Eigenschaft

$$V_1 \hat{\otimes} V_2 = V.$$

Die von V auf $V_1 \otimes V_2$ induzierte Prä-Hilbertraumstruktur entspricht also genau der ursprünglichen Struktur auf $V_1 \otimes V_2$, welche von dem Skalarprodukt

$$(u_1 \otimes u_2 \mid v_1 \otimes v_2)_{V_1 \otimes V_2} := (u_1 \mid v_1)_{V_1} \cdot (u_2 \mid v_2)_{V_2}$$

bestimmt wird. Seien G_i die Reprokerne zu V_i. Dann gilt

Satz 5.1. *Der Reprokern G zu $V = V_1 \hat{\otimes} V_2$ ist $G = G_1 \otimes G_2$.*

Beweis. Sei $u \in V$; da $V_1 \otimes V_2$ dicht in V liegt, existiert stets eine Folge $\{u_n\} \subset V_1 \otimes V_2$, welche in der Normtopologie von V gegen u konvergiert. Einerseits gilt nun

$$u_n = (G_1 \otimes G_2 \mid u_n)_{V_1 \otimes V_2} = (G \mid u_n)_V.$$

Andererseits ist

$$u = \lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} (G \mid u_n)_V \in V_1 \hat{\otimes} V_2,$$

also $G = G_1 \otimes G_2$.

Bemerkung 5.1. Die von dem Skalarprodukt auf $V_1 \hat{\otimes} V_2$ induzierte Topologie liegt im allgemeinen echt zwischen der ϵ- und der π-Topologie auf $V_1 \hat{\otimes} V_2$.

BEISPIEL 5.1. Es seien Ω_1 und Ω_2 offene und beschränkte Intervalle von $\mathbb{R}$. Die Sobolevräume $V_i := W_2^{k_i}(\Omega_i)$ seien mit äquivalenten Skalarprodukten vom Typ (3.3) versehen:

$$((u \mid v))_i := (T_i u \mid T_i v)_{L^2(\Omega_i)} + (U_i u \mid U_i v)_{\mathbb{R}_i^k}.$$

Die Greenschen Funktionen zu den Randwertproblemen $T_i u = h_i$, $U_i u = 0$ mit $h_i \in L^2(\Omega_i)$ und $u \in W_2^{k_i}(\Omega_i)$ seien g_i; weiter sei $\operatorname{Ker}(T_i) := \langle e_{i1}, \ldots, e_{ik_i} \rangle$. W sei der lineare Raum aller Funktionen $v \in C^0(\Omega_1 \times \Omega_2)$, welche folgende Darstellung besitzen:

$$\begin{aligned} v(x, y) = {} & \sum_{j=1}^{k_1} \sum_{r=1}^{k_2} \lambda_{jr} e_{1j}(x) \cdot e_{2r}(y) \\ & + \sum_{r=1}^{k_2} e_{2r}(y) \int_{\Omega_1} g_1(x, s)\, v_{1r}(s)\, ds \\ & + \sum_{j=1}^{k_1} e_{1j}(x) \int_{\Omega_2} g_2(y, t)\, v_{2j}(t)\, dt \\ & + \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} g_1(x, s)\, g_2(y, t)\, v_{12}(s, t)\, ds\, dt, \end{aligned}$$

wobei $\lambda_{jr} \in \mathbb{R}$, $v_{1r} \in L^2(\Omega_1)$, $v_{2j} \in L^2(\Omega_2)$ und $v_{12} \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ ist für $1 \leqslant j \leqslant k_1$, $1 \leqslant r \leqslant k_2$. Auf W wird durch

$$\begin{aligned} (u \mid v)_W := {} & \sum_{j=1}^{k_1} \sum_{r=1}^{k_2} \lambda_{jr} \gamma_{jr} + \sum_{j=1}^{k_1} (u_{2j} \mid v_{2j})_{L^2(\Omega_2)} \\ & + \sum_{r=1}^{k_2} (u_{1r} \mid v_{1r})_{L^2(\Omega_1)} + (u_{12} \mid v_{12})_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt definiert, bezüglich dessen $W \in \operatorname{Hilb}(\mathbb{R}^{\Omega_1 \times \Omega_2})$ ist. Wird nun das Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2$ durch

$$V_1 \times V_2 \ni (u, v) \mapsto u \cdot v \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

definiert, so liegt $V_1 \otimes V_2$ dicht in W und die von W auf $V_1 \otimes V_2$ induzierte Prä-Hilbertraumstruktur entspricht genau der ursprünglichen auf $V_1 \otimes V_2$. $W = V_1 \hat{\otimes} V_2$ ist isometrisch isomorph zu $\mathbb{R}^{k_1 \cdot k_2} \times L^2(\Omega_1)^{k_2} \times L^2(\Omega_2)^{k_1} \times L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

BEISPIEL 5.2. Seien $k = (k_1, ..., k_n)$ ein Multiindex mit $k_i > \frac{1}{2}$, $V_i = W_2^{k_i}(\mathbb{R})$ die Sobolevräume in der Bemerkung 3.3 und V der Hilbertraum in der Bemerkung 4.2. Dann gilt

$$V = \widehat{\bigotimes_{1 \leqslant i \leqslant n}} V_i ,$$

wobei das Tensorprodukt $\otimes_{1 \leqslant i \leqslant n} V_i$ durch

$$\bigtimes_{i=1}^{n} V_i \ni (u_1, ..., u_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} u_i \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

definiert ist. $G = \prod_{i=1}^{n} G_i$ ist—gemäß Satz 5.1—der Reprokern zu V.

6. LIMITEN VON REPROKERNEN

I. *Abhängigkeit von Skalarprodukten*

Sei Ω eine beliebige nichtleere Menge und $V \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$. $(\cdot \mid \cdot)_n$ sei eine Folge von Skalarprodukten auf V so, daß gilt

$$\begin{gathered} c(u, u)_V \leqslant (u, u)_n \leqslant C(u, u)_V , \\ \lim_{n\to\infty} \{ \sup_{\|u\|_V \leqslant 1, \|v\|_V \leqslant 1} |(u \mid v)_V - (u \mid v)_n | \} = 0; \end{gathered} \tag{6.1}$$

dabei seien $c, C \in \mathbb{R}$ unabhängig von $n \in \mathbb{N}$. Dann ergibt sich

SATZ 6.1. *Unter der Voraussetzung* (6.1) *gilt für alle* $y \in \Omega$:

$$\lim_{n\to\infty} \| G(\cdot, y) - G_n(\cdot, y)\|_V = 0, \tag{6.2}$$

wobei G der Reprokern zu V und G_n der Reprokern zu $V_n = (V, (\cdot \mid \cdot)_n)$ ist.

Beweis. Seien $A: V \to V'$ und $A_n: V_n \to V_n'$ die isometrischen Isomorphismen. Mit (6.1) erhält man:

$$\lim_{n\to\infty} \{ \sup_{\|u\|_V \leqslant 1, \|v\|_V \leqslant 1} |(u \mid (id - A^{-1}A_n) v)_V |\} = 0,$$

also $\lim_{n\to\infty} \| A - A_n \|_{L(V,V')} = 0$. Da $\langle A^{-1}\mathscr{L}, \delta_y\rangle_{V,V'} = \langle G(\cdot, y), \mathscr{L}\rangle_{V,V'}$ und $\langle A_n^{-1}\mathscr{L}, \delta_y\rangle_{V_n,V_n'} = \langle G_n(\cdot, y), \mathscr{L}\rangle_{V_n,V_n'}$ für alle Elemente $\mathscr{L} \in V'$ und $y \in \Omega$ gilt, ergibt sich (6.2).

II. *Abhängigkeit von* $V_n \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$

Es sei nun $W \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$; V und V_n, $n \in \mathbb{N}$, seien abgeschlossene Unterräume von W, welche mit der induzierten Hilbertschen Struktur versehen werden. Die Folge der Unterräume V_n konvergiert gegen V, falls

$$\lim_{n\to\infty} \{ \inf_{v\in V_n} \| v - u \|_W \} = 0, \qquad u \in V,$$
$$V = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\left\langle \bigcap_{i=n}^{\infty} V_i \right\rangle}^W} \tag{6.3}$$

gilt. Wir erhalten also

SATZ 6.2. *Unter der Voraussetzung* (6.3) *konvergiert die Folge der Reprokerne* G_n *zu* V_n *gegen den Reprokern* G *zu* V; *d.h. für alle* $y \in \Omega$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} \| G(\cdot, y) - G_n(\cdot, y)\|_W = 0$.

Beweis. Sei $y \in \Omega$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \|(G_n \mid G(\cdot, y))_W - G(\cdot, y)\|_W = 0.$$

Ist R_n der Reprokern zu $\overline{\langle \bigcap_{i=n}^{\infty} V_i \rangle}^W$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|(R_n \mid G_n(\cdot, y))_W - (G \mid G_n(\cdot, y))_W\|_W$$
$$= \lim_{n\to\infty} \| G_n(\cdot, y) - (G \mid G_n(\cdot, y))_W \|_W = 0.$$

Also ergibt sich insgesamt $\lim_{n\to\infty} G_n(\cdot, y) = G(\cdot, y)$ in W.

III. *Abhängigkeit vom Definitionsbereich*

Sei Ω_n eine Folge von Teilmengen der Menge Ω so, daß $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ und $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ gilt. $V_n \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^{\Omega_n})$ sei eine Folge von Unterhilberträumen, für die Fortsetzungsoperatoren $F_n \in L(V_n, V)$ existieren. Die Reprokerne zu V_n seien R_n, der Reprokern zu $V \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^\Omega)$ sei G. Weiter gelte

$$\lim_{n\to\infty} \{ \inf_{v\in F_n(V_n)} \| u - v \|_V \} = 0, \qquad u \in V. \tag{6.4}$$

Wir erhalten somit

SATZ 6.3. *Gilt* $F_n(R_n \mid v)_{V_n} = (F_n R_n \mid F_n v)_V$ *für alle Elemente* $v \in V_n$, *so ist für alle* $y \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \|(F_n R_n)(\cdot, y) - G(\cdot, y)\|_V = 0. \tag{6.5}$$

Beweis. Sei G_n der Reprokern zu $\overline{F_n(V_n)}^V$. Dann folgt aus (6.4)

$$\lim_{n\to\infty} \| G_n(\cdot, y) - G(\cdot, y)\|_V = 0$$

für alle $y \in \Omega$. Weiter ist $F_n v = (F_n R_n \mid F_n v)_V = (G_n \mid F_n v)_V$ für alle $v \in V_n$. Also gilt (6.5).

Sei nun Ω_n eine Folge von Teilmengen einer Menge Ω_1, so daß $\Omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ und $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ gilt. Zu der Folge $V_n \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^{\Omega_n})$ gebe es Restriktionsoperatoren $E_n \in L(V_n, V)$. Es gelte weiter

$$\lim_{n\to\infty} \{ \inf_{v\in E_n(V_n)} \| u - v \|_V\} = 0, \qquad u \in V, \quad V \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{R}^{\Omega}). \tag{6.6}$$

In diesem Falle erhalten wir

SATZ 6.4. *Gilt $E_n(R_n \mid v)_{V_n} = (E_n R_n \mid E_n v)_V$ für alle Elemente $v \in V_n$, so ist für alle $y \in \Omega$*

$$\lim_{n\to\infty} \|(E_n R_n)(\cdot, y) - G(\cdot, y)\|_V = 0. \tag{6.7}$$

Beweis. Mit den Reprokernen G_n zu $\overline{E_n(V_n)}^V$ ergibt sich $E_n v = (E_n R_n \mid E_n v)_V = (G_n \mid E_n v)_V$ für alle $v \in V_n$. Also folgt aus der Beziehung (6.6) sofort (6.7).

BEISPIEL 6.1 (Abhängigkeit von V_i). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend; es gelte: $\Omega \in \mathscr{C}^{2k}$ und $k > n/2$. $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$ sei eine Folge offener Teilmengen so, daß $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} \partial\Omega_i$ ist und

$$V := \mathring{W}_2^k(\Omega),$$

$$V_i := \left\{ u \in W_2^k(\Omega) : \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \,\Big|\, \partial\Omega_i = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant k-1 \right\}.$$

V_i werde mit der von $W_2^k(\Omega)$ induzierten Hilbertschen Struktur versehen; dann gilt (6.3). Somit konvergiert die Folge der Reprokerne G_i zu V_i gegen den Reprokern G zu V.

BEISPIEL 6.2 (Abhängigkeit von Ω_i). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, beschränkt und zusammenhängend; Ω_i sei eine Folge offener und zusammenhängender Teilmengen von Ω so, daß $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ und $\Omega_i \subset \Omega_{i+1}$ gilt. Weiter seien $\Omega, \Omega_i \in \mathscr{C}^{2k}$, $k > n/2$ und

$$V := \mathring{W}_2^k(\Omega),$$
$$V_i := \mathring{W}_2^k(\Omega_i).$$

Die Fortsetzungsoperatoren F_i: $V_i \to V$ werden definiert durch

$$F_i u(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \Omega_i \\ 0, & x \notin \Omega_i . \end{cases}$$

Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$: $\| F_i \|_{L(V_i, V)} \leq 1$. Weiter ist die Voraussetzung (6.4) erfüllt. Also konvergiert die Folge der Reprokerne zu $\overline{F_n(V_n)}^V$ gegen den Reprokern zu V.

LITERATUR

1. J. M. BEREZANSKI, "Expansions in Eigenfunctions of Self-adjoint Operators," Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1968.
2. G. BIRKHOFF AND C. DE BOOR, Piecewise polynomial interpolation and approximation, *in* "Approximation of Functions" (Herausgeber, H. L. Garabedian, Eds.), Elsevier, Amsterdam/London/New York, 1965.
3. C. DE BOOR AND R. E. LYNCH, On splines and their minimum properties, *J. Math. Mech.* **15** (1966), 953–969.
4. J. L. LIONS AND E. MAGENES, "Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications," Vol. 1, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.
5. L. MANSFIELD, Optimal approximation and error bounds in spaces of bivariate functions, *J. Approximation Theory* **5** (1972), 77–96.
6. J. NEČAS, "Les méthodes directes en théorie des équations élliptiques," Masson, Paris, 1967.
7. J. T. ODEN, Some contributions to the mathematical theory of mixed finite element approximations, *in* "Proceedings of the 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis," Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1973.
8. K. RITTER, Two dimensional spline functions and best approximations of linear functionals, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 352–368.
9. A. SARD, "Linear Approximation," Math. Surveys No. 9, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963.
10. W. SCHEMPP AND U. TIPPENHAUER, Reprokerne zu Spline-Grundräumen, *Math. Z.* **136** (1974), 357–369.
11. L. SCHWARTZ, "Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures," Oxford Univ. Press, London/New York, 1973.
12. L. SCHWARTZ, "Théorie des distributions," Hermann, Paris, 1957.
13. F. TRÈVES, "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels," Academic Press, New York, 1967.
14. G. WAHBA, A class of approximate solutions to linear operator equations, *J. Approximation Theory* **9** (1973), 61–77.